$\alpha_{LPH\Lambda}$ Jurnal Ilmiah Matematika
Volume I, Nomor 1 Juni 2021
ISSN

Karakteristik Graf Jumlah Fibonacci

Muhamad B. Manggaprouw[1], Westy B. Kawuwung[2], Tiku Tandiangnga[3]

[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Cenderawasih
e-mail: brianmuhamad26@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini mengkaji aplikasi graf untuk menentukan nilai-nilai n *yang memenuhi, sehingga bilangan* $1,2,3,\cdots,n$ *dapat diurutkan sedemikian sehingga jumlahan dari setiap pasang bilangan yang berurutan membentuk bilangan Fibonacci. Graf yang terbentuk disebut graf jumlah Fibonacci, adalah graf yang simpulnya diberi label* $1,2,3,\cdots,n$ *dan setiap pasang simpulnya bertetangga jika dan hanya jika jumlah label dari kedua simpul tersebut adalah bilangan Fibonacci. Penelitian dilakukan dengan metode kajian pustaka, yaitu dengan mempelajari referensi yang terkait dengan topik yang dikaji. Pada jurnal ini dijabarkan langkah-langkah pelabelan graf jumlah Fibonacci dan dibuktikan bahwa untuk setiap* $n \geq 1$ *graf tersebut memiliki paling banyak dua lintasan perentang dan merupakan graf bipartisi. Hasil analisis menunjukkan bahwa lintasan perentang pada graf jumlah Fibonacci hanya terdapat pada saat* $n = 9, 11, F_k$ *atau* $F_k - 1$. *Jika* $n \not\equiv 1 (mod\ 3)$, *maka hanya terdapat satu lintasan perentang pada graf jumlah Fibonacci* G_n, *sebaliknya graf tersebut akan memiliki tepat dua lintasan perentang jika* $n \equiv 1 (mod\ 3)$. *Selanjutnya jika graf jumlah Fibonacci* G_{n+1} *merupakan hasil dari penambahan sisi tunggal pada graf bipartisi* G_n, *maka graf* G_{n+1} *juga merupakan graf bipartisi.*

Kata Kunci: *Graf, Lintasan Perentang, Pelabelan, Bilangan Fibonacci.*

Abstract

This study examines the application of graphs to determine the values of n *that meet, so that the numbers* $1,2,3,\cdots,n$ *can be ordered so that the sum of each successive pair of numbers forms a Fibonacci number. The graph that is formed is called a Fibonacci sum graph, is a graph whose vertices are labeled* $1,2,3,\cdots,n$ *and each pair of vertices is neighbors if and only if the sum of the labels of the two vertices is a Fibonacci number. The research was conducted using the literature review method, namely by studying references related to the topic being studied. In this journal, the steps for labeling a Fibonacci sum graph are described and it is proven that for every* $n \geq 1$ *the graph has at most two spanning paths and is a bipartition graph. The results of the analysis show that the spanning path on the Fibonacci sum graph only exists when* $n = 9, 11, F_k$ *or* $F_k - 1$. *If* $n \not\equiv 1 (mod\ 3)$, *then there is only one spanning path in the Fibonacci sum* G_n *graph, otherwise the graph will have exactly two spanning paths if* $n \equiv 1 (mod\ 3)$. *Furthermore, if the Fibonacci sum graph* G_{n+1} *is the result of adding a single edge to the bipartition graph* G_n, *then the graph* G_{n+1} *is also a bipartition graph.*

Keywords: *Graphs, Spanning Paths, Labeling, Fibonacci Numbers.*

A. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu bidang ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang bilangan dan segala sesuatu yang berkaitan dengannya. Dalam bidang matematika terdapat beberapa cabang yang masing-masing mempunyai fungsi yang berbeda. Matematika terapan merupakan salah satu cabang bidang matematika yang mempelajari penerapan konsep matematika pada bidang-bidang lain. Salah satu yang dipelajari di dalam matematika terapan adalah teori graf yang pertama kali dikemukakan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler. Dalam makalahnya yang berjudul *Solutio problematis ad geometriam situs pertimentis*.

Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri dari himpunan sejumlah berhingga objek yang disebut simpul (*vertices,* atau *vertex*) dan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan berhingga dari simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Himpunan simpul pada graf G dinotasikan dengan V_G dan himpunan sisinya dinotasikan dengan E_G, sehingga graf G dapat dituliskan dengan notasi $G = (V_G, E_G)$.

Salah satu topik yang cukup menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf, yaitu sebarang pemetaan atau fungsi yang memetakan himpunan dari unsur-unsur graf tersebut (simpul maupun sisi), ke himpunan bilangan asli yang disebut label. Bilangan Fibonacci juga dapat digunakan dalam pelabelan suatu graf, sehingga graf tersebut dikenal dengan graf jumlah Fibonacci.

Pada penelitian sebelumnya oleh Fox dkk (2014) yang berjudul lintasan perentang dalam graf jumlah Fibonacci, telah ditunjukkan bagaimana cara mengurutkan bilangan dari $1, 2, 3, \dots, n$ sehingga jumlah dari dua suku berturut-turut adalah bilangan Fibonacci. Kemudian pada tahun 2017, Arman dan Gunderson mengembangkan penelitian tersebut dan menemukan beberapa sifat dari graf jumlah Fibonacci. Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk menjelaskan kembali karakteristik dari graf jumlah Fibonacci.

B. Metode Penelitian

Pembahasan pada artikel ini menggunakan metode kajian pustaka dengan mempelajari beberapa jurnal ilmiah, buku, dan artikel dari internet yang terkait dengan karakteristik graf jumlah fibonacci.

C. Hasil dan Pembahasan

1. Graf Jumlah Fibonacci

Definisi 2.1 (Fox, 2014)

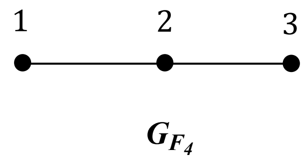
Untuk setiap $n \geq 1$ graf jumlah Fibonacci pada $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dinotasikan dengan G_n, adalah suatu graf yang terdiri dari himpunan simpul $\mathbb{N}$ dan himpunan sisinya adalah $\{uv : u + v = F_k$,untuk suatu $k\}$. Dengan F_k adalah bilangan Fibonacci suku ke $- k$.

Untuk selanjutnya karena fokus pembahasan graf jumlah adalah n yang merupakan bilangan Fibonacci, maka graf jumlah Fibonacci dinotasikan dengan G_{F_k}. Berdasarkan Definisi 2.1, G_{F_k} merupakan suatu graf yang setiap simpulnya diberi label dengan bilangan asli $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots, n$ dan setiap simpul pada graf tersebut bertetangga jika dan hanya jika hasil penjumlahan dari kedua simpul tersebut merupakan bilangan Fibonacci $F_k \in \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$.

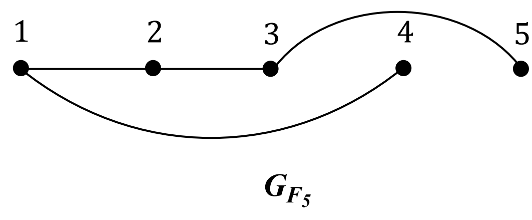
Berdasarkan Definisi 2.1, berikut adalah langkah-langkah dalam melabelkan graf membentuk graf jumlah Fibonacci:

1. Identitikasi nilai F_k pada barisan Fibonacci untuk menentukan jumlah simpul pada graf tersebut.
2. Labelkan simpul-simpul tersebut secara berurutan dengan bilangan asli $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots, n$.
3. Hubungkan dua simpul berbeda dengan sebuah sisi jika jumlahan dari label kedua simpul tersebut merupakan bilangan Fibonacci.

Untuk lebih jelasnya, misalkan $k = 4$ dan $k = 5$, $F_k = F_4$ dan $F_5 =$ 4 dan 5. Jadi, graf G_{F_4} dan G_{F_5} berturut-turut merupakan graf yang terdiri atas 3 dan 5 buah simpul. Sehingga pelabelan graf jumlah Fibonacci dari kedua graf tersebut adalah:



Gambar 1 Graf Jumlah Fibonacci G_{F_4}



Gambar 2 Graf Jumlah Fibonacci G_{F_5}

Berdasarkan Definisi 2, secara umum graf jumlah Fibonacci G_{F_k} untuk setiap $1 \leq k \leq 7$ dapat direpresentasikan kedalam bentuk matriks ketetanggaan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} F_2 & F_3 & & F_4 & F_5 & & & F_6 & & & & & F_7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Pada matriks tersebut, setiap entrinya menyatakan ketetanggaan antar simpul pada G_{F_7}. Entri 1 untuk menyatakan bahwa simpul-simpul pada graf tersebut bertetangga, sebaliknya apabila simpul-simpul pada graf tersebut tidak bertetangga, maka entri pada matriks tersebut bernilai 0.

2. Lintasan Perentang Pada Graf Jumlah Fibonacci

Lintasan perentang dalam graf jumlah Fibonacci G_{F_k} dapat digunakan untuk menemukan urutan pasangan n simpul yang membentuk bilangan Fibonacci. Namun pada implementasinya tidak semua n pada graf jumlah Fibonacci G_{F_k} memiliki lintasan perentang. Pada bagian ini diberikan beberapa sifat yang terdapat pada lintasan perentang dalam graf jumlah Fibonacci.

a) Jika $k \geq 5$, maka G_{F_k} memiliki lintasan perentang.

Bukti:

Misalkan P_k merupakan subgraf perentang dari G_{F_k} yang setiap sisinya merupakan hasil penjumlahan dari simpul-simpul yang bertetangga dengan nilai $\{F_{k-1}, F_k, F_{k+1}\}$. Klaim bahwa P_k adalah suatu lintasan, sehingga P_k tidak memiliki siklus dan dua simpul dari G_{F_k} memiliki derajat 1, sementara sisanya memiliki derajat 2.

Untuk melihat bahwa setiap simpul dari G_{F_k} memiliki derajat paling banyak 2 di P_k, cukup untuk ditunjukkan bahwa setiap simpul paling banyak terletak pada dua sisi dengan label e dimana $e \in \{F_{k-1},\ F_k,\ F_{k+1}\}$. Hal ini sesuai dari pengamatan bahwa tidak terdapat simpul $\{1,\ F_{k-1} - 1\}$ yang terletak pada sisi yang memiliki jumlah F_{k+1}, dan tidak terdapat simpul $\{F_{k-1}, \dots,\ F_k\}$ yang terletak pada sisi yang memiliki jumlah F_{k-1}.

Sebaliknya, setiap simpul yang kurang dari F_{k-1} terletak pada sisi yang memiliki jumlah F_{k-1}, kecuali untuk simpul $\frac{F_{k-1}}{2}$ jika F_{k-1} adalah genap. Demikian juga, untuk setiap simpul yang kurang dari F_k terletak pada suatu sisi yang memiliki jumlah F_k, kecuali untuk simpul $\frac{F_k}{2}$ jika F_k adalah genap. Akhirnya, setiap simpul $\{F_{k-1}, \ldots, F_k\}$ terletak pada sisi yang memiliki jumlah F_{k+1}, kecuali untuk simpul $\frac{F_{k+1}}{2}$ jika F_{k+1} adalah genap. Dengan demikian setiap simpul G_{F_k} setidaknya memiliki derajat 2 di P_k, kecuali untuk simpul F_k, $\frac{F_{k-1}}{2}$, $\frac{F_k}{2}$, dan $\frac{F_{k+1}}{2}$. Simpul F_k harus berderajat 1, dan simpul $\frac{F_{k-1}}{2}$, $\frac{F_k}{2}$, dan $\frac{F_{k+1}}{2}$ memiliki derajat satu tepat ketika setiap simpul F_{k-1}, F_k, dan F_{k+1} adalah genap. Karena tepat satu dari F_{k-1}, F_k, dan F_{k+1} adalah genap, maka P_k memiliki tepat dua simpul berderajat 1.

Selanjutnya diasumsikan bahwa P_k tidak memiliki siklus. Misalkan sebaliknya, dan C merupakan siklus di P_k. Setiap simpul dari C terletak pada tepat dua sisi di P_k. Berdasarkan argumen pada paragraf sebelumnya, tepat salah satu sisi ini harus memiliki jumlah F_k. Dengan demikian, salah satu sisi di C memiliki jumlah $\{F_{k-1}, F_{k+1}\}$. Misalkan α dan β berturut-turut menyatakan angka pada sisi di C yang memiliki jumlah F_{k-1} dan F_{k+1}. Perhatikan bahwa C memiliki $\alpha+\beta$ sisi dengan jumlah F_k. Karena setiap simpul terletak tepat di satu sisi yang memiliki jumlah F_k, maka jumlahnya adalah $(\alpha+\beta)F_k$, karena setiap simpul terletak pada tepat satu sisi memiliki jumlah $\{F_{k-1}, F_{k+1}\}$, jumlahnya adalah $\alpha F_{k-1} + \beta F_{k+1}$. Dengan demikian $(\alpha+\beta) = \alpha F_{k-1} + \beta F_{k+1}$, Sehingga; $\alpha(F_k - F_{k-1}) = \beta(F_{k+1} - F_k)$, dengan menerapkan definisi bilangan Fibonacci ($F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$) sekali pada setiap ruas sehingga diperoleh $\alpha(F_{k-1} + F_{k-2} - F_{k-1}) = \beta(F_k + F_{k-1} - F_k)$ menghasilkan $\alpha F_{k-2} = \beta F_{k-1}$. karena F_{k-2} dan F_{k-1} relatif prima, maka $F_{k-1} \mid \alpha$ dan $F_{k-2} \mid \beta$, akibatnya $\alpha \geq F_{k-1}$, dan $\beta \geq F_{k-2}$. Sehingga $\alpha+\beta \geq F_k$, hal ini tidak mungkin karena P_k hanya memiliki F_{k-1} sisi. Oleh karena itu pengandaian bahwa P_k memiliki siklus adalah salah dan harus diingkari.

b) Misalkan k adalah bilangan bulat yang lebih dari 4, kemudian pilih m dari $\{k-1,\ k,\ k+1\}$ sedemikian sehingga F_m adalah genap. Pada graf G_{F_k}, lintasan P_k adalah satu-satunya lintasan perentang dengan simpul akhir $\frac{F_m}{2}$ dan F_k.

Bukti:

Sebagaimana telah diungkapkan pada bukti Teorema 3.2.1, bahwa tidak terdapat simpul pada graf G_{F_k} yang terletak pada kedua sisi dengan jumlah F_{k-1} dan F_{k+1}. Berdasarkan fakta ini dan pengamatan bahwa simpul $\frac{F_m}{2}$ tidak terletak pada sisi yang memiliki jumlah F_m, maka simpul $\frac{F_m}{2}$ memiliki derajat 1 di P_k. Demikian pula dengan simpul F_k yang memiliki derajat 1 di P_k. Karena kedua simpul tersebut terlalu besar untuk terletak pada sisi yang memiliki jumlah $\{F_{k-1}, F_k\}$. Sehingga $\frac{F_m}{2}$ dan F_k adalah simpul akhir P_k, seperti yang diklaim.

Andaikan G_{F_k} memiliki beberapa lintasan lain yaitu P dengan simpul akhir yang sama. Berdasarkan definisi dari P_k, setiap sisi yang dimiliki oleh P_k tetapi tidak untuk P setidaknya memiliki jumlah F_{k-1}. Demikian pula untuk setiap sisi yang dimiliki oleh P tetapi tidak untuk P_k memiliki jumlah kurang dari F_{k-1}. Sebaliknya, sisi tersebut merupakan milik P_k karena setidaknya terdapat satu sisi milik P yang bukan milik P_k, sehingga pernyataan ini dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{\text{sisi pada } P_k} (u+v) > \sum_{\text{sisi pada } P} (u+v)$$

Namun, kedua jumlah di atas termasuk untuk simpul $\frac{F_m}{2}$ dan F_k masing-masing sekali dan setiap simpul lainnya di G_{F_k} dua kali. Dengan demikian kedua jumlah itu haruslah sama, hal ini mengakibatkan terjadinya kontradiksi. Sehingga pengandaian harus diingkari, dengan kata lain pada graf G_{F_k} tidak terdapat lintasan perentang selain P_k.

c) Misalkan k merupakan suatu bilangan bulat yang lebih dari 4. Jika $k \not\equiv 1 \pmod 3$, maka G_{F_k} memiliki lintasan perentang yang unik. Jika m$k \equiv 1 \pmod 3$, maka G_{F_k} memiliki tepat dua lintasan perentang, lintasan pertama memiliki simpul akhir F_k dan $\frac{F_{k-1}}{2}$, sementara lintasan yang lainnya memiliki simpul akhir F_k dan $F_k - \frac{F_{k-4}}{2}$.

Bukti:

Karena F_k memiliki derajat 1 pada graf G_{F_k}, setiap lintasan perentang memuat F_k sebagai salah satu simpul akhir. Jika $k \equiv 2 \pmod 3$ maka simpul $\frac{F_{k+1}}{2}$ memiliki derajat 1, karena simpul tersebut tidak dapat diletakkan pada sisi yang memiliki jumlah F_{k+1} dan terlalu besar untuk diletakkan pada sisi yang memiliki jumlah F_{k-1}. Dengan demikian, setiap lintasan perentang memiliki simpul akhir F_k dan $\frac{F_{k+1}}{2}$. Berdasarkan Teorema 3.2.2, P_k adalah satu-satunya lintasan pada graf G_{F_k}. Demikian juga jika $k \equiv 0 \pmod 3$, maka simpul $\frac{F_k}{2}$ memiliki derajat 1. Sekali lagi, terlihat bahwa P_k adalah satu-satunya lintasan perentang pada graf tersebut.

Akhirnya, misalkan $k \equiv 1 \pmod 3$, dan $S = \left\{\frac{F_{k-4}}{2}, \frac{F_{k-1}}{2}, F_{k-1} + \frac{F_{k-4}}{2}, F_k - \frac{F_{k-4}}{2}\right\}$. Perhatikan bahwa S menginduksi siklus pada graf G_{F_k}. Selain itu, dari simpul-simpul yang terdapat pada S, hanya $\frac{F_{k-4}}{2}$ yang memiliki tetangga di luar S, sehingga simpul S harus menjadi salah satu simpul akhir pada lintasan perentang. Setiap lintasan perentang harus melalui simpul $\frac{F_{k-4}}{2}$ dan berakhir pada salah satu simpul $\frac{F_{k-1}}{2}$ atau $F_k - \frac{F_{k-4}}{2}$. Selanjutnya, lintasan perentang tersebut dapat diubah agar berakhir pada simpul $\frac{F_{k-1}}{2}$ dan $F_k - \frac{F_{k-4}}{2}$ (atau sebaliknya) dengan melakukan permutasi pada tiga simpul terakhirnya.

d) Untuk $n \geq 5$, Graf G_n memiliki lintasan perentang yang unik jika dan hanya jika $n = 9$ atau $n = 11$ atau $n \in \{F_k,\ F_k - 1\}$ untuk suatu k. Kecuali untuk $n \in \{F_k,\ F_k - 1\}$ dengan $k \equiv 1 \pmod 3$, maka G_n memiliki dua lintasan perentang.

Bukti:

Diketahui bahwa simpul F_k memiliki derajat 1 pada graf G_{F_k}. Selanjutnya diberikan lintasan perentang pada graf G_{F_k}, dengan menghapus simpul F_k pada graf tersebut menghasilkan lintasan perentang pada graf $G_{F_k - 1}$. Simpul F_{k-1} juga memiliki derajat 1 pada graf $G_{F_{k-1}}$, penambahan sisi $F_{k-1}F_k$ pada lintasan perentang $G_{F_{k-1}}$ menghasilkan lintasan perentang pada graf G_{F_k}. Dengan demikian, G_{F_k} dan $G_{F_{k-1}}$ memiliki jumlah lintasan perentang yang sama. Berdasarkan pengamatan terhadap graf G_9 dan G_{11}, kedunya merupakan suatu graf dengan lintasan perentang yang unik.

Misalkan n bukan 9, 11 atau dari bentuk F_k dan $F_k - 1$. Kemudian pilih k sedemikian sehingga $F_{k-1} + 1 \leq n \leq F_k - 2$. Karena $n < F_k - 1$, maka simpul F_{k-1} dan $F_{k-1} + 1$ terletak pada sisi yang memiliki jumlah F_k, sehingga kedua simpul tersebut memiliki derajat 1 pada graf G_n. Jika $F_{k-1} + 1 < n < F_k - 2$, maka terdapat simpul $F_{k-1} + 2$ pada graf G_n yang juga memiliki derajat 1 dan menghalangi keberadaan lintasan perentang. Sehingga dapat diasumsikan bahwa $n \in \{F_{k-1} + 1,\ F_k - 2\}$.

Untuk membuktikannya, misalkan $n = F_{k-1} + 1$, dan P merupakan lintasan perentang pada graf G_n. Karena simpul n memiliki derajat 1 pada G_n maka simpul n harus menjadi simpul akhir dari P, dengan menghapus simpul tersebut akan menghasilkan lintasan perentang P' pada graf $G_{F_{k-1}}$. Perhatikan bahwa simpul n pada graf G_n bertetangga dengan simpul $F_{k-2} - 1$, sehingga simpul $F_{k-2} - 1$ merupakan simpul akhir pada P'. Berdasarkan bukti dalam Teorema 3.2.3, dapat disimpulkan bahwa simpul akhir dari setiap lintasan perentang pada graf $G_{F_{k-1}}$ terletak pada $\left\{F_{k-1},\ \frac{F_{k-2}}{2},\ \frac{F_{k-1}}{2},\ \frac{F_k}{2},\ F_{k-1} - \frac{F_{k-5}}{2}\right\}$. Sehingga simpul $F_{k-2} - 1$ terletak pada himpunan ini, dengan memeriksa setiap kemungkinan diperoleh hasil yang menunjukkan bahwa $n \in \{4, 9\}$, hal ini bertentangan dengan pilihan n.

Misalkan sebaliknya $n = F_k - 2$, dan P merupakan lintasan perentang pada graf G_n. Baik simpul F_{k-1} maupun simpul $F_{k-1} + 1$ memiliki derajat 1 pada G_n, sehingga keduanya harus menjadi simpul akhir dari setiap lintasan perentang. Selain itu pada graf G_{F_k}, simpul F_{k-1} bertetangga dengan simpul F_k dan simpul $F_{k-1} + 1$ bertetangga dengan simpul $F_k - 1$. Dengan demikian kami dapat memperpanjang P ke lintasan perentang P'

pada G_{F_k} yang memiliki simpul akhir F_k dan F_{k-1}. Seperti dalam kasus sebelumnya, hal ini menyiratkan bahwa simpul F_{k-1} terletak pada $\left\{F_k, \frac{F_{k-1}}{2}, \frac{F_k}{2}, \frac{F_{k+1}}{2}, F_k - \frac{F_{k-4}}{2}\right\}$. Dengan memeriksa setiap kemungkinan, diperoleh hasil yang menyatakan bahwa $n \in \{0, 3, 11\}$, sekali lagi hal ini bertentangan dengan pilihan n.

3. Graf Jumlah Fibonacci adalah Graf Bipartisi

Simpul-simpul pada graf jumlah Fibonacci G_n dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan $V_1(G_n)$ dan $V_2(G_n)$ sedemikian sehingga G_n adalah graf bipartisi.
Bukti:

Diketahui untuk $n \leq 6$, G_n adalah graf pohon, sehingga berdasarkan sifat dari graf pohon, G_n adalah graf bipartisi. Akan dibuktikan bahwa untuk $n > 6$, G_n juga merupakan graf bipartisi. Berdasarkan pengamatan, penambahan sisi tunggal $(n,\ n+1)$ pada graf G_n akan menghasilkan graf G_{n+1}. Apabila G_n adalah graf bipartisi, maka penambahan sisi $(n,\ n+1)$ tidak menghilangkan sifat bipartisi pada graf G_{n+1}. Jadi, terbukti bahwa untuk $n \geq 1$, G_n adalah graf bipartisi.

D. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penulisan ini, maka dapat disimpulkan beberapa hal, yakni:

a) Perumusan pelabelan graf jumlah Fibonacci G_{F_k}, yaitu:
   1. Identitikasi F_k pada graf barisan Fibonacci untuk menentukan jumlah simpul n pada graf tersebut.
   2. Labelkan simpul-simpul tersebut secara berurutan dengan bilangan asli $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots, n$.
   3. Hubungkan dua simpul berbeda dengan sebuah sisi jika dan hanya jika jumlah dari kedua label simpul tersebut merupakan bilangan Fibonacci.

b) Graf jumlah Fibonacci memiliki karakteristik sebagai berikut:
   1. Untuk $k \geq 5$, graf jumlah Fibonacci G_{F_k} memiliki lintasan perentang. Lintasan tersebut digunakan untuk menentukan urutan dari n bilangan, sehingga diperoleh barisan yang jumlah dari setiap dua suku yang berurutan merupakan bilangan Fibonacci.
   2. Barisan dari n bilangan yang jumlah dari setiap dua suku yang berurutan merupakan bilangan Fibonacci dapat diperoleh jika dan hanya jika $n = 9, 11, F_k$ atau $F_k - 1$.
   3. Pada graf jumlah Fibonacci paling banyak terdapat dua lintasan perentang untuk setiap n bilangan.
   4. Pada graf G_{F_k} dengan $k > 4$, hanya terdapat satu lintasan perentang jika $k \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$. Sebaliknya, graf tersebut memiliki tepat dua lintasan perentang jika $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$.

5. Lintasan P_k merupakan satu-satunya inti dari lintasan perentang pada graf G_{F_k}, bahkan ketika G_{F_k} memiliki dua lintasan perentang.
6. Pada graf G_{F_k} dengan $k \geq 1$, setiap simpul F_k bertetangga dengan simpul F_{k-1}.
7. untuk setiap $n \geq 1$, graf jumlah Fibonacci G_n adalah graf bipartisi karena simpul-simpul pada graf tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan, dimana setiap simpul dalam satu himpunan tidak terhubung tetapi simpul-simpul antar kedua himpunan tersebut terhubung lengkap.

E. Daftar Pustaka

Arman, A. dan Gunderson, D. (2017). *Properties of Fibonacci Sum-Graph*. Canada: Departement of Mathematics University of Manitoba.

Bartle, R.G. (1999). *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John Wiley & Sons Inc.

Fox, Kyle. Dkk. (2014). *Spanning Path in Fibonacci Sum-Graphs*. Urbana: Departement of Computer Science University of Illinois.

Gallian, Joseph A. (2018). *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. Duluth: Departement of Mathematics and Statistics University of Minnesota Duluth.

Grimaldi, P. Ralph. (2004). *Discrete and Combinatorial Mathematics an Applied Introduction Fifth Edition*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Harju, Tero. (2007). *Graph Theory*. Turku: Departement of Mathematics University of Turku.

Harary, Frank. (1994). *Sum Graph Over All the Integers*. Las Cruces: Departement of Computer Science New Mexico State University.

Herstein, N.I. & Winter, J. David. (1988). *Matrix Theory and Linear Algebra*. New York: Macmilan Publishing Company.

Manongga, D. dan Nataliani, Y. (2013). *Matematika Diskrit*, Jakarta: Kencana Perdana Media Grup.

Munir, Rinaldi. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika Bandung.

Pelle, Irawan F. (2010). Pelabelan Total (*a, d*) Sisi Anti Ajaib pada Graf Lintasan dan Graf Lingkaran. Jurnal S-1 Matematika. Fakultas MIPA Universitas Cenderawasih, Jayapura.

Sukirman. (2006). *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

West, B. Douglas. (2001). *Introduction to Graph Theory Second Edition*. Urbana: Pearson Education, Inc.

Wibisono, Samuel. (2008). *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Graha Ilmu.